数理解析研究所講究録
1083 巻 1999 年 199-206

微分・差分方程式の解の解析接続

千葉大理学部　石村隆一　(Ryuichi Ishimura)
千葉大理学部　岡田靖則　(Yasunori Okada)

1 Introduction

この小論では、$f(x)$ を次のような線型の微分・差分方程式の解析的な解とするとき、$f(x)$ の定義域がどこまで拡張できるか、ということを考察します：

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(D_x) f(x-\lambda_j) = 0, \tag{1.1}$$

但しここで各 λ_j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ は $\mathbb{R}^n$ の点、$p_j(D_x)$ は定数係数の線型微分作用素 $p_j(D_x) = \sum_\alpha a^j_\alpha D^\alpha_x$ を表すとします。このような方程式は畳込み方程式として捉えることができるので、以下もう少し一般的に畳み込み方程式を複素領域で考察します。

2 畳込み方程式の特性集合と解の接続

この小論では開集合 $D \subset \mathbf{C}^n$ に対し D 上で定義された正則関数の空間を $\mathcal{O}(D)$ で表すことにする。空間 $\mathcal{O}(D)$ には通常のように D 上の広義一様収束位相を入れる。こうして得られた位相線型空間は Fréchet 空間になるが、Distributions の場合と同じように、その位相的双対 $\mathcal{O}'(D)$ を考えることができる。特に $\mathcal{O}'(\mathbb{C}^n)$ の任意の元 S を、**解析的汎関数**という。解析的汎関数 S と"テスト関数" $f \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}^n)$ との双対性を表す内積は $< S, f >$ と書くことにする：すなわち $< S, f > := Sf$. さて S は、制限写像 $r_D : \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}(D)$ の双対写像 ${}^t r_D : \mathcal{O}'(D) \to \mathcal{O}'(\mathbb{C}^n)$ の像に入っているとき、 D で**支えられる**という。また、S がコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ で**支えられる**とは、 K を含む任意の開集合 D で支えられることとする。これは、定数 $C > 0$ が存在し、次の評価式が成り立つことと同値である：

$$| < S, f > | \leqslant C \sup_{z \in D} |f(z)| \quad (f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)).$$

解析的汎関数に対しては、このような集合 K が Distributions の場合の、"台"の役割をするのであるが、一般に解析的汎関数に対しては台そのものは定義できない。さらに、任意の解析的汎関数はあるコンパクト集合で支えられる。ついでまでに、（佐藤幹雄の）超関数とは、実コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ で支えられる解析的汎関数（の局所有限和）のことに他ならな

い。さて、解析的汎関数 S に対し、その Fourier-Borel 変換を次で定義する：

$$\hat{S}(\zeta) := < S, \exp z \cdot \zeta > . \tag{2.1}$$

S が K で支えられるということは $\hat{S}$ の増大条件と関連する：

Theorem 2.1. *(Pólya-Ehrenpreis-Martineau)* S がコンパクト凸集合 K で支えられるための必要十分条件は、$\hat{S}$ が $\mathbb{C}^n$ 全体で定義された正則関数で、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $C_\varepsilon > 0$ が存在して、次の評価式が成り立つことである：

$$|\hat{S}(\zeta)| \leqslant \exp(H_K(\zeta) + \varepsilon|\zeta|) \quad (\zeta \in \mathbb{C}^n), \tag{2.2}$$

但しここで、$H_K(\zeta) := \sup_{z\in K} \mathrm{Re}(z \cdot \zeta)$ であり、 K の**支持関数**といわれる。

一般に、整関数（i.e. $\mathbb{C}^n$ 全体で定義された正則関数）$\sigma(\zeta)$ は、$A, B > 0$ があって、$|\sigma(\zeta)| \leqslant A \exp(B|\zeta|)$ $(\zeta \in \mathbb{C}^n)$ となるとき、**指数型**の整関数と呼ばれる。定理から $\hat{S}(\zeta)$ は指数型の整関数であることがわかる。 関数

$$h_\sigma(\zeta) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|\sigma(r\zeta)|}{r}$$

を $\sigma(\zeta)$ の **growth indicator**,

$$h^*_\sigma(\zeta) := \limsup_{\zeta'\to\zeta} h_\sigma(\zeta')$$

を、**regularized growth indicator** という。

Definition 2.2. $\sigma(\zeta)$ が**条件 (S) を満たす**、とは次の条件が成り立つことである：

$$\begin{cases} \forall\zeta_0 \in \mathbb{C}^n, \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \ \ s.t. \\ \text{任意の } r > N \text{ に対し } |\zeta - \zeta_0| < \varepsilon \text{ なる } \zeta \in \mathbf{C}^n \text{ が取れて} \\ \dfrac{\log|\sigma(r\zeta)|}{r} \geqslant h^*_\sigma(\zeta_0) - \varepsilon \text{ とできる .} \end{cases}$$

Remark 1. この条件は、河合 [Ka] によって初めて導入されたもので、[I-Oj] によって、整関数論で古典的な、正則増大性の概念（定義については [Lv] 及び [Ll-G] を見て下さい）と同値であることが示されている。

次に、解析的汎関数 S でコンパクト凸集合 M に支えられるもの、ω を $\mathbb{C}^n$ の開集合、$f(z) \in \mathcal{O}(\omega - M)$, $g(z) \in \mathcal{O}(\omega)$ とすると、畳込み方程式

$$S * f = g \tag{2.3}$$

が定義される、但し、$A - B := \{a - b | a \in A, b \in B\}$ とする。さて、 $\mathbb{C}^n$ に ”方向別の無限遠点の集合” S^{2n-1}_∞ を付け加えることでコンパクト化した位相空間を $\mathbb{D}^{2n} := \mathbb{C}^n \sqcup S^{2n-1}_\infty$ とおく。任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対し、ζ-方向の無限遠点を $\zeta\infty$ と書くことにする。即ち、$\zeta\infty := (\mathbb{R}_+ \cdot \zeta$ の $\mathbb{D}^{2n}$ における閉包 $) \cap S^{2n-1}_\infty$. 同様に、$\mathbb{C}^n$ の任意の集合 A に対し $A\infty$ を定義する。そこで次のように作用素 $S*$ の**特性集合**を定義する：

Definition 2.3.

$$\mathrm{Char}_\infty(S*) := \{\rho\infty \in S_\infty^{2n-1} \mid \exists(\zeta_\nu) \subset \mathbb{C}^n \ s.t.$$
$$\zeta_\nu \to \infty, \hat{S}(\zeta_\nu) = 0, \frac{\zeta_\nu}{|\zeta_\nu|} \to \frac{\rho}{|\rho|} \ (\nu \to \infty)\}.$$

$S*$ の特性集合を用いて、開集合 ω に対し、集合

$$\bigcap_{-\zeta\infty\in\mathrm{Char}_\infty(S*)} \{z \in \mathbb{C}^n | Re z \cdot \zeta \leqslant H_\omega(\zeta)\}$$

の内部集合を Ω と書くことにしよう。これは ω を含む開凸集合である。次の定理を引用する。証明については [I-O-Oj] を見て下さい。

Theorem 2.4. 条件 (S) の下、更に、$h_{\hat{S}}^*(\zeta) \equiv H_M(\zeta)$ が成り立っているとする。このとき、$\omega - M$ で定義された正則関数 $f(z)$ で $S * f = 0$ を満たすものは全て、開集合 $\Omega - M$ まで解析接続される。

Remark 2. 斉次畳込み方程式の解の接続問題に対して、非斉次畳込み方程式 (2.3) の可解性、すなわち任意の右辺 $g \in \mathcal{O}(\omega)$ に対する解 $f \in \mathcal{O}(\omega - M)$ の存在については、正則増大性 (Remark 1) つまり条件 (S) が "ほぼ同値" な条件であることが証明される ([Ko], [Kr], [Ll-G], [I-O1])。定理とあわせると、線型の畳込み方程式については、条件 (S) は最も基本的な条件であるということができる。

3 微分・差分方程式の解の接続

前節の定理を用いて微分・差分方程式の解の接続を考察する。指数型整関数 $p(\zeta) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ は $\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n} h_p^*(\zeta) = 0$ となるとき **infra-exponential type** という。このような整関数に対しては、Taylor 展開 $p(\zeta) = \sum_\alpha a_\alpha \zeta^\alpha$ において変数 ζ に、"微分" D_z を代入して得られる **無限階の微分作用素** $P := p(D_z) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ は、任意の開集合 ω に対し、$P = p(D_z) : \mathcal{O}(\omega) \to \mathcal{O}(\omega)$ となることが示せる。つまり、$p(\zeta)$ は**局所作用素**である、あるいは "点を動かさない作用素" である。これに対し簡単のために $n = 1$ として e^ζ は明らかに infra-eponential ではなく、無限階微分作用素 $e^{D_z} := \sum_{j=0}^\infty D_z^j/j!$ は : $\mathcal{O}(\omega) \to \mathcal{O}(\omega + 1)$ を定めこれは、定義域を 1 だけずらす : (実際、$\sum_{j=0}^\infty D_z^j f(z)/j! = f(z+1)$ であるから。) さて、ここでは微分作用素として局所作用素のみをあつかい、e^{D_z} のような作用素は差分作用素としてとらえる。以上の準備の下、線型微分・差分方程式の一般型は、$p_j(\zeta)$ を infra-exponential、$\lambda_j \in \mathbb{C}^n \quad 1 \leqslant j \leqslant l$ として、

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(D_z) f(z - \lambda_j) = 0 \tag{3.1}$$

となる。これは、デルタ関数 $\delta(z)$ を用いれば、解析的汎関数

$$S := \sum_{j=1}^{l} p_j(D_z)\delta(z - \lambda_j) \tag{3.2}$$

に対する畳込み方程式 $S * f(z) = 0$ と言ってもよい。また、S の Fourier-Borel 変換

$$\sigma(\zeta) := \sum_{j=1}^{l} p_j(-\zeta)\mathrm{e}^{\lambda_j\cdot\zeta} \tag{3.3}$$

を、S の **symbol** と呼ぶことにする。$\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l\}$ とおいて、その凸包をとって得られる閉多面体を M とおく。すると、S は閉凸集合 M で支えられる。M の頂点の成す集合を(順序を並べ替えておいて) $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$ としてよい。そこで、$i, j = 1, 2, \cdots, k (i < j)$ に対し 頂点λ_i と λ_j を結ぶ辺 $L_{ij} := [\lambda_i, \lambda_j]$ とし、$L^*_{ij} := \{\zeta \in \mathbb{C}^n | H_M(\zeta) = Re(z\cdot\zeta)(\forall z \in L_{ij})\}$ および $L^* := \cup L^*_{ij}$ とおく。$\mathbb{C}^n \setminus L^*$ の各連結成分はある $\lambda_j (1 \leqslant j \leqslant k)$ を頂点とする開凸錐 γ_j であるから、$\mathbb{C}^n \setminus L^* = \bigsqcup_{j=1}^{k} \gamma_j$ と分解される。そこでつぎの定理が証明される([I-O3]):

Theorem 3.1. (3.2) の S に対する微分・差分方程式について特性集合は次のように表せる:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Char}_\infty(S*)\\
&= L^*\infty \ \sqcup\ (\gamma_1\infty \cap \mathrm{Char}_\infty(p_1(D_z))) \sqcup (\gamma_2\infty \cap \mathrm{Char}_\infty(p_2(D_z))) \sqcup\\
&\qquad \cdots \ \sqcup\ (\gamma_k\infty \cap \mathrm{Char}_\infty(p_k(D_z))).
\end{aligned}$$

さて [R] Theorems 6.1.1, 6.1.3 および [I-O3] によると $\sigma(\zeta)$ は定理 2.4 の条件を満足するので、上の定理を用いれば、微分・差分方程式の解の解析接続については、M の形と各 $p_j(D_z)$ の特性集合から完全にわかる。例えば、各 $p_j(D_z)$ が対応する γ_j に特性的な方向を持たなければ、その解析接続の様子は次のような図で表される。すなわち、$n = 1$ として $-M, \omega$ を図 1 のようにとると、$\mathrm{Char}_\infty(S*)$ は図 1 の第 2 図のように $-M$ の各辺の外向き法線方向(の無限遠方向の集合)になるが、$\omega - M$ で定義された任意の正則関数解 $f(z)$ は 4 隅まで含めた 4 角形 $\Omega - M$ まで解として解析接続される。

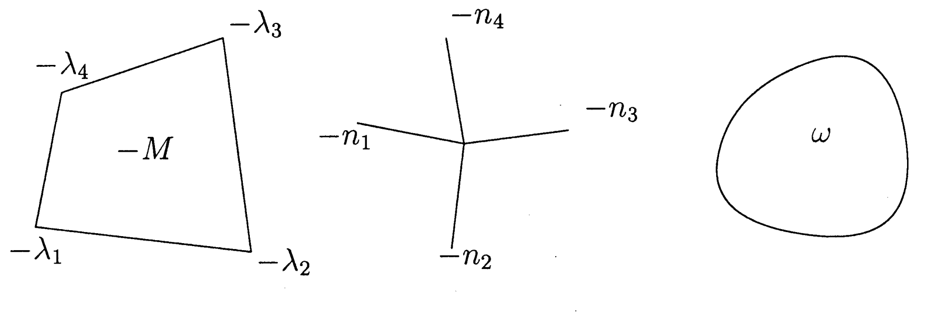

図 1: $-M$, $\mathrm{Char}(S*)^a$ and ω

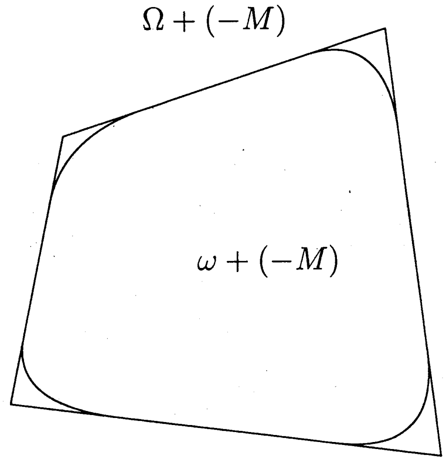

図 2: $\omega+(-M)$ and $\Omega+(-M)$

4 Examples

この節では開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し、U 上の実解析的関数の全体の空間を $\mathcal{A}(U)$ と表すことにする。$\mathcal{A}(U)$ は U の複素領域における近傍で定義された正則関数の全体と一致することに注意する。

Example . $n=1$ とし、独立変数を t と書くことにする。開区間 $I:=]a,b[\subset \mathbb{R}$ をとり、また $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_l$ であるとする。$p_j(\tau)$ $(1\leqslant j\leqslant l)$ を τ の多項式とし、区間 I 上で微分・差分方程式

$$p_1(D_t)x(t-\lambda_1)+p_2(D_t)x(t-\lambda_2)+\cdots+p_l(D_t)x(t-\lambda_l)=0 \tag{4.1}$$

を考える。この方程式の核 S は $S=\sum_{j=1}^{l}p_j(D_t)\delta(t-\lambda_j)$ であるから、$\mathrm{Char}_\infty(S*)=\{\pm\sqrt{-1}\infty\}$ となる。従って、定理 2.4 によると、区間 I の幅 $(b-a)$ に対し、条件

$$\lambda_l-\lambda_1<b-a$$

が成り立てば、解 $x(t)\in\mathcal{A}(I)$ は $\mathbb{R}$ 全体に実解析関数として延長され、$\mathbb{R}$ 全体で方程式 (4.1) を満たすことがわかる。

Example . $n\geqslant 1$ とし、$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_l \quad \in\mathbb{R}^n$, $p_j(\zeta)$ を ζ の多項式 $(1\leqslant j\leqslant l)$ で、各 $\mathrm{Char}_\infty(p_j(D_x))\cap\gamma_j\infty=\emptyset$ を満たすとする。そこで、

$$\mu(x):=\sum_{j=1}^{l}p_j(D_x)\delta(x-\lambda_j)$$

とおくと、これは台をコンパクト集合 $\Lambda:=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}$ に持つ超関数であり、このとき M を Λ の凸包をとってえられるコンパクト集合として、開集合 $\omega-M$ 上で微分・差分方

程式

$$p_1(D_x)f(x-\lambda_1)+p_2(D_x)f(x-\lambda_2)+\cdots+p_l(D_x)f(x-\lambda_l)=0 \tag{4.2}$$

を考える。定理 3.1 と定理 2.4 によると、$f(x)\in\mathcal{A}(\omega-M)$ は $S=\mu$ に対し Ω を定義 2.3 のようにとって、(4.2) の解として $\Omega-M$ まで延長されることがわかる。例えば、$n=2, l=3$, $\lambda_1=(0,0), \lambda_2=(1,0), \lambda_3=(0,1)$, $a\in\mathbb{R}, \varepsilon>0$ として、区間

$$\{(x,y)|a<x<a+1+\varepsilon, y>0\}$$

で定義された実解析解 $f(x,y)$ は上半平面 $\{(x,y)|y>0\}$ まで延長される。

Biblioglaphy

[A] T. Aoki, *Existence and continuation of holomorphic solutions of differential equations of infinite order*, Adv. in Math., **72**(1988), 261 – 283.

[I-O1] R. Ishimura and Y. Okada, *The existence and the continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domais*, Bull. Soc. math. France, **122**(1994), 413 – 433.

[I-O2] R. Ishimura and Y. Okada, *The micro-support of the complex defined by a convolution operator in tube domains*, Singularities and Differential Equations, Banach Center Publ., **33** (1996), 105 – 114.

[I-O3] R. Ishimura and Y. Okada, *Examples of convolution operators with described characteristics*, in preparation.

[I-O-Oj] R. Ishimura, Y. Okada and J. Okada, The continuation of holomorphic solutions for convolution equations in complex domains, pre-print.

[I-Oj] R. Ishimura and J. Okada, Sur la condition (S) de Kawai et la propriété de croissance régulière d'une fonction sous-harmonique et d'une fonction entière, Kyushu J. Math., **48**(1994), 257 – 263.

[Ka] T. Kawai, *On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **17**(1970), 467 – 517.

[Ki] C. O. Kiselman, *Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants*, Bull. Soc. Math. France, **97**, 1969, p. 329 – 356.

[Ko] Yu. F. Korobǐnik, *Convolution equations in the complex domain*, Math. USSR Sb., **36**(1985), 171 – 193.

[Kr] A. S. Krivosheev, *A criterion for the solvability of nonhomogeneous convolution equations in convex domains of* $\mathbf{C}^n$, Math. USSR Izv., **36**(1991), 497 – 517.

[Ll-G] P. Lelong and L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Grung. Math. Wiss., Berlin, Hidelberg, New York, Springer vol.282, 1986.

[Lv] B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Transl. Math. mono. vol.5, AMS, Providence, 1964.

[R] L. I. Ronkin, *Functions of completely regular growth*, MIA, Kluwer, 1992.

[Sé] A. Sébbar, *Prolongement des solutions holomorphes de certains opérateurs différentiels d'ordre infini à coefficients constants*, Séminaire Lelong-Skoda, LNM822, Springer, Berlin (1980),199–220.

[V] A. Vidras, *Interpolation and division problems in spaces of entire functions with growth conditions and their applications*, Doct. Diss., Univ. of Maryland.

[Z] M. Zerner, *Domaines d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sc., Paris, **272**(1971), 1646 – 1648.

Ryuichi ISHIMURA
Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science,
Chiba University, Yayoicho, Chiba, 263-8522 Japan
ishimura@math.s.chiba-u.ac.jp

Yasunori OKADA
Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science,
Chiba University, Yayoicho, Chiba, 263-8522 Japan
okada@math.s.chiba-u.ac.jp